Révisions – Exercices

1 Suites numériques

Exercice 1 (Calculs de sommes de suites)

Soit $n > 1$.
Montrer que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Montre que, si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice 2

1. Déterminer les limites des deux suites suivantes : a) $u_n = \frac{n-3}{n+3}$ b) $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$
2. Donner un exemple de suite bornée non convergente

Exercice 3

Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite décroissante.

Exercice 4

On s'intéresse à la suite définie par $\begin{array}{l} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{array}$

1. Montrer que la suite définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n.

2 Dérivation

Exercice 5

Compléter les tableaux suivants :

Fonction f	Intervalle I	Fonction dérivée f'
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	
$x \mapsto \mathbf{e}^x$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

Fonction	fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
uv	
$\frac{u}{v}$, avec $v \neq 0$	
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	
$\sqrt{u}$	
$\mathbf{e}^u$	
$\ln(u)$	

Exercice 6

Tracer le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2\mathbf{e}^{-2x}$.
(Rappeler la définition de la fonction exponentielle ainsi que la relation fonctionnelle qu'elle vérifie).

3 Nombres complexes

Exercice 7

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
a) $(2+5\mathbf{i})+(3-7\mathbf{i})$ b) $(2+5\mathbf{i})(3-7\mathbf{i})$ c) $\mathbf{i}^4$ d) $\frac{1}{2+5\mathbf{i}}$ e) $\frac{2+5\mathbf{i}}{3+7\mathbf{i}}$

Exercice 8

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :
a) $1+\mathbf{i}$ b) $-1+\mathbf{i}$ c) $1+\sqrt{3}\mathbf{i}$ d) $\frac{1+\mathbf{i}}{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}$

4 Pour aller plus loin

Exercice 9 (suite de Fibonacci)

La suite de Fibonacci est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ , u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Dans cet exercice, on va démontrer l'expression du terme u_n en fonction de n.

1. Donner les 10 premiers termes de cette suite.
2. En supposant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ soit géométrique de raison q, montrer que $q^2 = q+1$.
3. En déduire les seules valeurs possibles pour q.
   On appelle $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite correspondant à une raison positive et $(b_n)_{n\geq 0}$ celle de raison négative.
4. Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}a_n + \frac{-1}{\sqrt{5}}b_n$ vérifie $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$.
5. Conclure sur l'expression de la suite de Fibonacci.